多項式とその導関数の近接根を分離する定理

佐々木, 建昭

数理解析研究所講究録 1395 巻 2004 年 76-82

多項式とその導関数の近接根を分離する定理*

佐々木 建昭
筑波大学 数学系†
TATEAKI SASAKI
INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

$\mathbf{C}$ 上の 1 変数多項式 $P(z)$ は原点近傍に m 個の近接根を持つとする。$0 \le k < m$ なる整数 k に対し、$\mathrm{d}^k P/\mathrm{d}z^k$ は原点近傍に $m-k$ 個の近接根を持つが、その近接根クラスタを他根から分離する定理を示す。この定理を Marden-Walsh および Yakoubsohn の定理と比較し、著者の定理が優れていることを示す。

1 はじめに

$P(z) = P^{(0)}(z)$ は $\mathbf{C}$ 上の 1 変数多項式とし、$P(z)$ の k 階微分を $P^{(k)}(z)$ とする。$P^{(k)}, k = 0,1,2,\cdots,$ の根全体に関しては、「$P^{(k+1)}$ の根全体を含む凸包は $P^{(k)}$ の根全体を含む凸包の内部にある」との美しい定理がある。本論文では、近接根クラスタに対して似たようなな定理を導く。

$P(z)$ の根に対しては、最大根の上界あるいは最小根の下界を与える多くの公式がある：たとえば、[Mig92] を参照。その発展として、次の疑問を抱くのは自然である：一つの近接根クラスタのみを含む複素平面上の円盤は決定できるか？ どのような条件下で近接根クラスタは他の根と区別できるか？ 導関数 $P'(z)$ に対して同様な円盤を決められるか？ $P(z)$ の近接根に関するこれらの疑問に関しては、近年、Yakoubsohn [Yak00] と Terui-Sasaki [TS00] が似た答を与えた：Yakoubsohn は近接根クラスタを他根から分離する円盤を与え、Terui-Sasaki は近接根クラスタを含む小円盤と他根を含まない大円盤（二つの円盤は同心）を与えた。3 章で議論するが、Terui-Sasaki の定理の方が Yakoubsohn の定理より簡潔である。

$P'(z)$ の近接根、したがって $P^{(k)}(z)$ の近接根に関しては、Marden [Mard49] が著した古い本の中に一つの答があり、Yakoubsohn [Yak00] が別の答を与えている。本論文で著者も新しい答を与える。3 章で議論するように、Marden-Walsh の古い定理は非常に強い制約を課しており、実際的に使用するには難がある。さらに、$P'(z)$ の近接根に対する上界が非常に緩い。Yakoubsohn の定理ははるかによい上界を与えている。本論文で、著者は Yakoubsohn の定理より美しく、より完全な定理を与える。

上述した定理は基本的だが、数値算法のみならず近似代数においても有用であろう。

2 主定理

$P(z)$ は次式で表される $\mathbf{C}$ 上の 1 変数多項式とする。

$$P(z) = c_n z^n + \cdots + c_{m+1} z^{m+1} + z^m + e_{m-1} z^{m-1} + \cdots + e_0. \tag{2.1}$$

*Work supported in part by Japanese Ministry of Education, Science and Culture under Grants 15300002.
†sasaki@math.tsukuba.ac.jp

ここで、係数は次の2条件を満たすとする。

$$\begin{cases} \max\{|c_n|, \cdots, |c_{m+1}|\} = 1, \\ e \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|e_{m-1}|, |e_{m-2}|^{1/2}, \cdots, |e_0|^{1/m}\} \ll 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

$P(z)$ は原点近傍に m 個の微小根を持つ（多重度をカウントする）。もしも e が十分小さければ、これらの m 根は他の根から区別できるが、e が小さくなければ区別できない。では、m 個の微小根を誤りなく区別できるための e の最大値はいくらであろうか？ この疑問に対する一つの答が次の定理である（証明については [TS00] あるいは [ST02] を参照）。この定理は本論文において決定的な役割を果たす。

定理 1 (Sasaki-Terui [TS00]) $0 < e < 1/9$ ならば $P(z)$ は半径 $R_{\rm in}$ の円盤 $D_{\rm in}$ の中に m 個の微小根を持ち、半径 $R_{\rm out}$ の円盤 $D_{\rm out}$ の外に他の $n-m$ 個の根を持つ。ただし、円盤 $D_{\rm in}$ と $D_{\rm out}$ は原点に中心を持ち、半径はそれぞれ

$$R_{\substack{\rm out\\ \rm in}} = \frac{1+3e}{4}\cdot\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{16e}{(1+3e)^2}}\right] \tag{2.3}$$

である。半径 $R_{\rm in}$ と $R_{\rm out}$ は次の不等式を満たす。

$$\frac{1}{3} > R_{\rm in} < 2e\cdot\left[\frac{1}{1+3e} + \frac{16e}{(1+3e)^3}\right], \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{2} \geq R_{\rm out} > \frac{1}{2} - \frac{e(1-9e)}{2(1+3e)} - \frac{32e^2}{(1+3e)^3}. \tag{2.5}$$

系 1 次の関係式が成立する。

$$R_{\rm in}R_{\rm out} = e. \tag{2.6}$$

注釈 1 $\tilde{P}(z) \stackrel{\text{def}}{=} (z^n/e^m)P(e/z)$ とする。$\tilde{P}(z)$ は原点近傍に $n-m$ 個の微小根を持ち、$\tilde{P}(z)$ に対する円盤は $P(z)$ に対する円盤と同じになる。すなわち、$\tilde{P}(z)$ の $n-m$ 個の微小根は円盤 $D_{\rm in}$ の内部にあり、他の m 根は円盤 $D_{\rm out}$ の外部にある。

円盤の半径 $R_{\rm in}$ と $R_{\rm out}$ の e-dependence を図1に示す。

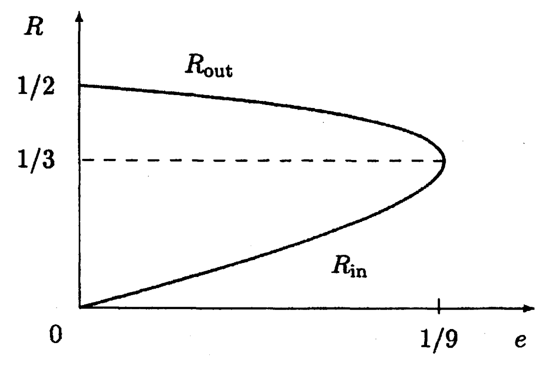

図1 e-dependence of $R_{\rm in}$ and $R_{\rm out}$.

さて、$P(z)$ の導関数 $P'(z)$ を考えよう。

$$P'(z) = nc_nz^{n-1} + \cdots + (m+1)c_{m+1}z^m + mz^{m-1} + (m-1)e_{m-1}z^{m-2} + \cdots + e_1. \tag{2.7}$$

$P'(z)$ を次のように $\hat{P}'(z)$ に変換する。

$$P'(z) \ \mapsto \ \hat{P}'(z) = (\gamma^{m-1}/m)\, P'(z/\gamma). \tag{2.8}$$

ここで、スケール因子 γ は次式で定める。

$$\gamma \ = \ \max\left\{ \left(\frac{m+1}{m}|c_{m+1}|\right)^{1/1},\ \left(\frac{m+2}{m}|c_{m+2}|\right)^{1/2},\ \cdots,\ \left(\frac{n}{m}|c_n|\right)^{1/(n-m)} \right\}. \tag{2.9}$$

この定め方により、$\hat{P}'(z)$ は $P(z)$ と同型の次の多項式となる。

$$\begin{aligned} \hat{P}'(z) \ &= \ \hat{c}'_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \hat{c}'_m z^m + z^{m-1} + \hat{e}'_{m-2}z^{m-2} + \cdots + \hat{e}'_0, \\ &\max\{|\hat{c}'_{n-1}|, |\hat{c}'_{n-2}|, \cdots, |\hat{c}'_m|\} = 1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

つぎに、e' を e と同様に次のように定める。

$$\begin{aligned} e' \ &\stackrel{\text{def}}{=} \ \max\{|\hat{e}'_{m-2}|, |\hat{e}'_{m-3}|^{1/2}, \cdots, |\hat{e}'_0|^{1/(m-1)}\} \\ &= \ \gamma \max\left\{ \left(\tfrac{m-1}{m}|e_{m-1}|\right)^{1/1},\ \left(\tfrac{m-2}{m}|e_{m-2}|\right)^{1/2},\ \cdots,\ \left(\tfrac{1}{m}|e_1|\right)^{1/(m-1)} \right\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

補題 1 次の不等式が成立する。

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{1/(n-m)} \ \le \ \gamma \ \le \ \frac{m+1}{m}, \tag{2.12}$$

$$0 \ \le \ e' \ \le \ \left(\frac{m-1}{m}\right)\gamma e. \tag{2.13}$$

証明. まず、正整数 j に対して次の不等式を示そう。

$$1)\quad \left(\frac{m-j}{m}\right)^{1/j} > \left(\frac{m-j-1}{m}\right)^{1/(j+1)} \ \text{ for } \ j < m-1, \tag{2.14}$$

$$2)\quad \left(\frac{m+j}{m}\right)^{1/j} > \left(\frac{m+j+1}{m}\right)^{1/(j+1)} \ \text{ for } \ j \ge 1. \tag{2.15}$$

1) は $(m-j)^{j+1} > m\,(m-j-1)^j$ と書き換えられるが、この不等式は次のように証明できる。

$$\begin{aligned} &(m-j-1+1)^{j+1} = (m-j-1)^{j+1} + (j+1)\,(m-j-1)^j + \cdots + 1 \\ &> \ (m-j-1)^{j+1} + (j+1)\,(m-j-1)^j = m\,(m-j-1)^j. \end{aligned}$$

2) は $(m+j)^{j+1} > m\,(m+j+1)^j$ と書き換えられる。

$$(m+j)^{j+1} = (m+j+1)^{j+1} - (j+1)\,(m+j+1)^j + {}_{j+1}C_2\,(m+j+1)^{j-1} - \cdots$$

ゆえ、2) は次の不等式に等価である。

$${}_{j+1}C_2\,(m+j+1)^{j-1} - {}_{j+1}C_3\,(m+j+1)^{j-2} + {}_{j+1}C_4\,(m+j+1)^{j-3} - \cdots \ > \ 0.$$

$j=1$ のとき、この不等式は $1>0$ である。$j \ge 2$ のとき、左辺の先頭から順に二つづつ項をまとめていく (j が奇数のときは最後に 1 が残る)。${}_{j+1}C_{j'+1} = {}_{j+1}C_{j'} \cdot (j+1-j')/(j'+1)$ かつ $(m+j+1) > (j+1-j')/(j'+1)$ なので、まとめた項は全て正となる。よって、2) が得られる。

補題を証明する。γ の定義と条件 $\max\{|c_n|, \cdots, |c_{m+1}|\} = 1$ から $\gamma \le \max\{(\frac{m+1}{m})^{1/1}, \cdots, (\frac{n}{m})^{1/(n-m)}\}$ が得られ、一方、$|c_{m+j}| = 1$ を満たす j に対しては $\gamma \ge (\frac{m+j}{m})^{1/j}$ となる。故に、1) から (2.12) が得られる。$e_{m-1} = \cdots = e_1 = 0$ ($|e_0| = e^m$) なる極端な場合には $e' = 0$ となり、一方、e' の定義から $e' \le \gamma e \max\{(\frac{m-1}{m})^{1/1}, \cdots, (\frac{1}{m})^{1/(m-1)}\}$ を得る。故に、2) から (2.13) の右辺を得る。 □

定理 2 (主定理) $e < 1/9$ とし、e' を上記のように定める。このとき、導関数 $P'(z)$ は円盤 D'_{in} の中に $m-1$ 個の微小根を持ち、他の $n-m$ 個の根は半径 R'_{out} の円盤 D'_{out} の外にある。ただし、円盤 D'_{in} と D'_{out} の中心は原点にあり、半径はそれぞれ

$$R'_{\substack{\mathrm{out}\\\mathrm{in}}} = \frac{1+3e'}{4\gamma}\cdot\left[1\pm\sqrt{1-\frac{16e'}{(1+3e')^2}}\right] \tag{2.16}$$

である。R'_{in} と R'_{out} は次の等式・不等式を満たす。

$$R'_{\mathrm{in}}R'_{\mathrm{out}} = e'/\gamma^2, \tag{2.17}$$

$$2\left(\frac{m}{m+1}\right)e' \quad < \quad R'_{\mathrm{in}} \quad \le \quad \left(\frac{m}{n}\right)^{1/(n-m)} R_{\mathrm{in}}, \tag{2.18}$$

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^2 e' \quad < \quad R'_{\mathrm{in}}R'_{\mathrm{out}} \quad < \quad \left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{1/(n-m)} e, \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{m}{m+1}\right) \quad < \quad R'_{\mathrm{out}} \quad \le \quad \left(\frac{m}{n}\right)^{2/(n-m)}\left(\frac{R_{\mathrm{in}}}{R'_{\mathrm{in}}}\right)R_{\mathrm{out}}. \tag{2.20}$$

証明. (2.12) の右辺の不等式と (2.13) から $e' \le e(m^2-1)/m^2 < e$ が得られるので、定理 1 を $\hat{P}'(z)$ に適用できる。$\hat{P}'(z)$ の根 $\hat{\zeta}$ は $P'(z)$ の根 $\hat{\zeta}/\gamma$ に対応するので、(2.16) を得る。$\hat{P}'(z)$ に対する円盤の半径をそれぞれ $\hat{R}'_{\mathrm{in}}$ および $\hat{R}'_{\mathrm{out}}$ とする：$R'_{\mathrm{in}} = \hat{R}'_{\mathrm{in}}/\gamma$, $R'_{\mathrm{out}} = \hat{R}'_{\mathrm{out}}/\gamma$。すると、(2.6) から (2.17) を得る。

$e < 1/9$ のとき、R_{in} (および R_{out}) は e に関して単調増加 (単調減少) するので、$\hat{R}'_{\mathrm{in}} < R_{\mathrm{in}}$ すなわち $R'_{\mathrm{in}} < R_{\mathrm{in}}/\gamma$ となる。ゆえに、(2.12) から (2.18) 右辺の不等式を得る。次に、(2.17) と $\hat{R}'_{\mathrm{out}} \le 1/2$ から $R'_{\mathrm{in}} \ge 2e'/\gamma$ が得られるので、(2.12) から (2.18) 左辺の不等式を得る。同様に、関係式 $R'_{\mathrm{in}}R'_{\mathrm{out}} = e'/\gamma^2 \le (\frac{m-1}{m})e/\gamma$ と (2.12) の不等式から (2.19) を得る。最後に、$\frac{1}{3} < \hat{R}'_{\mathrm{out}} = \gamma R'_{\mathrm{out}}$ から (2.20) の左辺が得られ、不等式 $e' < e$ から $\gamma^2 R'_{\mathrm{in}}R'_{\mathrm{out}} < R_{\mathrm{in}}R_{\mathrm{out}}$ が得られるので、(2.12) から (2.20) の右辺を得る。 □

系 2 $P(z)$ の k 階導関数を $P^{(k)}(z)$ とする。$e < 1/9$ ならば、$k=1,2,\cdots,m-1$ に対し、原点に中心を持つ小円盤 $D^{(k)}_{\mathrm{in}}$ と大円盤 $D^{(k)}_{\mathrm{out}}$ を、$P^{(k)}(z)$ の $n-m$ 個の根は $D^{(k)}_{\mathrm{in}}$ に含まれ、他の $n-m$ 個の根は $D^{(k)}_{\mathrm{out}}$ の外部にあるように選ぶことができる。これら円盤の半径をそれぞれ $R^{(k)}_{\mathrm{in}}$ と $R^{(k)}_{\mathrm{out}}$ ($R^{(k)}_{\mathrm{in}} < R^{(k)}_{\mathrm{out}}$) とすると、$R_{\mathrm{in}} > R^{(1)}_{\mathrm{in}} \ge \cdots \ge R^{(m-1)}_{\mathrm{in}}$ を満たす (等式 $R^{(j)}_{\mathrm{in}} = R^{(j+1)}_{\mathrm{in}}$ は $R^{(j)}_{\mathrm{in}} = R^{(j+1)}_{\mathrm{in}} = 0$ のときのみ成立)。さらに、半径 $R^{(k)}_{\mathrm{in}}$ と $R^{(k)}_{\mathrm{out}}$ は次の不等式を満たす。

$$R^{(k)}_{\mathrm{in}} \quad < \quad \left[\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\right]^{1/(n-m)} R_{\mathrm{in}}, \tag{2.21}$$

$$R^{(k)}_{\mathrm{out}}R^{(k)}_{\mathrm{in}} \quad < \quad \left(\frac{m-k}{m}\right)\left[\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\right]^{1/(n-m)} e. \tag{2.22}$$

注釈 2 不等式 $R'_{\mathrm{out}} < R_{\mathrm{out}}$ (または $R'_{\mathrm{out}} > R_{\mathrm{out}}$) が成立しそうに思われるが、それは間違っている。まず、$\gamma \simeq 1$ となる場合があることに注意しよう：$c_{n-1} = \cdots = c_{m+1} = 0$ の場合には、(2.9) から $\gamma = (\frac{n}{m})^{1/(n-m)}$ となるが、これは $n \to \infty$ のとき 1 になるからである。このことを念頭に、$e_{m-1} = \cdots = e_1 = 0$ である極端な場合を考えれば、$e' = 0$ となるから、$R'_{\mathrm{out}} = \hat{R}'_{\mathrm{out}}/\gamma \simeq \hat{R}'_{\mathrm{out}} = 1/2 > R_{\mathrm{out}}$ を得る。一方、多くの場合、$R'_{\mathrm{out}} < R_{\mathrm{out}}$ となる。たとえば $|c_{m+1}| = 1$ かつ $e = e_{m-1}$ の場合、$\gamma = \frac{m+1}{m}$ かつ $e' = \gamma\frac{m-1}{m}e = \frac{m^2-1}{m^2}e$ となる。大きな m に対しては $\gamma = 1 + O(1/m)$、$e'/e = 1 - O(1/m^2)$ であるから、図 1 と関係式 $R'_{\mathrm{out}} = \hat{R}'_{\mathrm{out}}/\gamma$ より、$e \approx 1/9$ でない限り、$R'_{\mathrm{out}} < R_{\mathrm{out}}$ となることが解る。

我々の公式の “鋭さ” を実例で見よう。まず、根が円盤 D_{in} と D_{out} に限りなく近付く、そんな多項式が存在するのである。その多項式とは次である。

$$P_B(z) = z^n + \cdots + z^{m+1} - z^m + ez^{m-1} + \cdots + e^m.$$

この多項式の n 根を $|\zeta_1| \le \cdots \le |\zeta_m| < |\zeta_{m+1}| \le \cdots \le |\zeta_n|$ とする。P_B が $e < |\zeta| < 1$ なる実根 ζ を持つとすれば、

$$\begin{aligned} P_B(\zeta) &= \zeta^{m+1}\Big(\frac{1-\zeta^{n-m}}{1-\zeta}\Big) - \zeta^m + e\zeta^{m-1}\Big(\frac{1-(e/\zeta)^m}{1-e/\zeta}\Big) \\ &\simeq \zeta^m\Big(\frac{\zeta}{1-\zeta} + \frac{e}{\zeta - e} - 1\Big) \quad \text{if } m \gg 1 \text{ and } n-m \gg 1. \end{aligned}$$

$m \to \infty$ かつ $n-m \to \infty$ の極限では、$P_B(\zeta) = 0$ ゆえ $\zeta/(1-\zeta) + e/(\zeta - e) = 1$ となる。この方程式の解は $R_{\rm in}$ と $R_{\rm out}$ ゆえ、$|\zeta_m| \to R_{\rm in}$ かつ $|\zeta_{m+1}| \to R_{\rm out}$ となることが解る。

次に、k を $k = 0 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow \cdots$ と変えたとき、次の多項式で $P^{(k)}(z)$ の近接根クラスタの縮み具合を見る。

$$P(z) = z^{10} - z^8/2 - z^7/3 + z^5 + ez^4 - e^2z^3 + e^4z/4 + e^5, \quad e = 0.1.$$

根の分布を図 2 に示す。円盤の半径は、$R_{\rm out} = 0.4$, $R_{\rm out}^{(1)} \simeq 0.364$, $R_{\rm out}^{(2)} \simeq 0.322$, 及び $R_{\rm in} = 0.25$, $R_{\rm in}^{(1)} \simeq 0.191$, $R_{\rm in}^{(2)} \simeq 0.134$ である。多くの場合、上界 (下界) は過大評価 (過小評価) となり易いが、円盤 $D_{\rm out}^{(k)}$ と $D_{\rm in}^{(k)}$ は近接根クラスタを他の根からかなり鋭く分離していることがわかる。

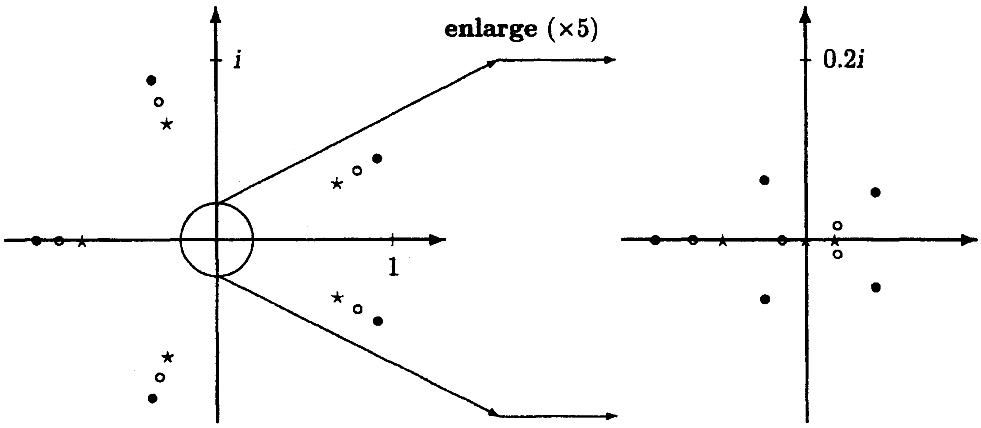

図 2 Distribution of the roots of $P^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2)$.
($\bullet$ for $P(z)$, $\circ$ for $P^{(1)}(z)$, and $\star$ for $P^{(2)}(z)$)
The left for larger roots, and the right for the close roots.

3 他の定理との比較

我々の定理を Marden-Walsh および Yakoubsohn の定理と比較する。

定理 3 (Marden-Walsh [Mard49]) $D(z_0, r)$ は半径が r で中心が $z = z_0$ の複素平面上の円盤とする。多項式 $P(z)$ は、円盤 $D(z_0, \tilde{R}_{\rm in})$ の内部に m 個の根を持ち、円盤 $D(z_0, \tilde{R}_{\rm out})$ の外部に他の $n-m$ 根を持つとする ($\tilde{R}_{\rm in} < \tilde{R}_{\rm out}$)。もしも

$$\frac{\tilde{R}_{\rm out} + \tilde{R}_{\rm in}}{\tilde{R}_{\rm in}} > \frac{2n}{m} \tag{3.1}$$

ならば、$P'(z)$ は $m-1$ 個の根を $D(z_0, \tilde{R}_{\rm in})$ の内部に、他の $n-m$ 個の根を $D(z_0, \tilde{R}'_{\rm out})$ の外部に持つ。ここで、$\tilde{R}'_{\rm out}$ は次式で与えられる。

$$\tilde{R}'_{\rm out} = \Big(\frac{m}{n}\Big)(\tilde{R}_{\rm out} + \tilde{R}_{\rm in}) - \tilde{R}_{\rm in}. \tag{3.2}$$

定理 3 では、条件 (3.1) がどんな場合に成立するか分らない。$\tilde{R}_{\rm in}$ と $\tilde{R}_{\rm out}$ の値を知るために $P(z)$ の全根を計算しなければならないとしたら、定理 3 は実際的には使えない。よって、定理 3 は定理 2 より不完全である。定理 3 を定理 2 と比べると、条件 (3.1) の右辺が n/m に比例するので、$n/m \gg$ の場合（多くの場合が該当する）にその条件は非常に強い制約となる。さらに、$\tilde{R}'_{\rm out}$ は $\tilde{R}_{\rm out}$ よりはるかに小さくなる；実際、$\tilde{R}_{\rm out}$ を $(\tilde{R}_{\rm out}+\tilde{R}_{\rm in})/\tilde{R}_{\rm in} \simeq 2n/m$ となるように選ぶと、$\tilde{R}'_{\rm out} \simeq \tilde{R}_{\rm in}$ となる。故に、(3.2) における $\tilde{R}'_{\rm out}$ は過小評価になっている。一方、定理 2 では $R'_{\rm out}$ は n/m にはほとんど依存しない。

定理 4 (Yakoubsohn [Yak00]) $P(z)$ は $z=z_0$ の近傍に m 個 $(m>1)$ の近接根を持つとする。$D(z_0,r)$ は半径が r で中心が $z=z_0$ の円盤とする。数 $E(z_0,r)$, $\beta(z_0)$ および $\gamma(z_0)$ を次式で定める。

$$E(z_0,r) = \frac{|P^{(m)}(z_0)|}{m!}r^m - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{|P^{(j)}(z_0)|}{j\,!}r^j - \sum_{j=m+1}^{n}\frac{|P^{(j)}(z_0)|}{j\,!}r^j, \tag{3.3}$$

$$\beta(z_0) = \max_{0\le j<m}\left|\frac{m!\,P^{(j)}(z_0)}{j\,!\,P^{(m)}(z_0)}\right|^{1/(m-j)}, \tag{3.4}$$

$$\gamma(z_0) = \max_{m<j\le n}\left|\frac{m!\,P^{(j)}(z_0)}{j\,!\,P^{(m)}(z_0)}\right|^{1/(j-m)}. \tag{3.5}$$

$0<r<\frac{1}{2\,\gamma(z_0)}$ および $E(z_0,r)>0$ を満たす数 r が存在すれば、円盤 $D(z_0,r)$ は z_0 近傍の m 個の近接根を含み、他の $n-m$ 個の根は $D(z_0,r)$ の外にある。

系 3 次の二つの不等式を満たす数 r が存在するとする。

$$r < \frac{1}{2\gamma(z_0)}, \tag{3.6}$$

$$\frac{\beta(z_0)}{r} \le \frac{1-2\gamma(z_0)\,r}{2-3\gamma(z_0)\,r}. \tag{3.7}$$

このとき、円盤 $D(z_0,r)$ は多項式 $P(z)$ の z_0 近傍の m 個の近接根を含み、他の $n-m$ 個の根は $D(z_0,r)$ の外にある。

系 4 (3.6), (3.7) および次の不等式を満たす数 r が存在するとする。

$$\frac{\beta(z_0)}{r} \le \frac{1-4\gamma(z_0)\,r+2\gamma(z_0)^2r^2}{2-6\gamma(z_0)\,r+3\gamma(z_0)^2r^2}. \tag{3.8}$$

このとき、円盤 $D(z_0,r)$ は導関数 $P'(z)$ の z_0 近傍の $m-1$ 個の近接根を含み、他の $n-m$ 個の根は $D(z_0,r)$ の外にある。

定理 4 を考察する。$P(z)$ を $z=z_0$ の周りで展開し、原点を $z=z_0$ に移動する：$P(z_0+z) = P(z_0) + \frac{P^{(1)}(z_0)}{1!}z + \cdots + \frac{P^{(n)}(z_0)}{n!}z^n$. 次に、$P(z_0+z)$ にスケール変換 $z \mapsto z/\gamma(z_0)$ を施すと次式を得る。

$$\begin{cases} \frac{\gamma(z_0)^m}{P^{(m)}(z_0)/m!}P(z_0+z/\gamma(z_0)) = \tilde{c}_n z^n + \cdots + \tilde{c}_m z^m + \cdots + \tilde{c}_0, \\ \tilde{c}_m = 1, \qquad \max\{|\tilde{c}_{m+1}|, |\tilde{c}_{m+2}|, \cdots, |\tilde{c}_n|\} = 1, \\ \max\{|\tilde{c}_{m-1}|^{1/1}, |\tilde{c}_{m-2}|^{1/2}, \cdots, |\tilde{c}_0|^{1/m}\} = \gamma(z_0)\beta(z_0). \end{cases}$$

これを見ると、定理 4 の $\beta(z_0)\gamma(z_0)$ は定理 1 の e に対応することが解る。

変換 $z \mapsto z/\gamma(z_0)$ を思い起こし、$\gamma(z_0)\,r = R$ かつ $\beta(z_0)\gamma(z_0) = e$ とおくと、(3.7) は次式となる。

$$\frac{e}{R} \le \frac{1-2R}{2-3R}.$$

この不等式を解くと、$R_{\rm in} \le R \le R_{\rm out}$ を得る。(公式を導くのに、[Yak00] では Rouche の定理が、[TS00] では根の上界に関する有名な定理が用いられた。異なる定理を用いたにも拘らず、同じ不等式が得られたのは興味深い)。故に、(3.7) を満たす最小の円盤 $D(z_0, R_{\rm in}/\gamma(z_0))$ は定理 2 における円盤 $D_{\rm in}$ と同じである。一方、条件 (3.6) は $R < 1/2$ となるが、$R < R_{\rm out} < 1/2$ なので、条件 (3.6) は不要である。同様に、条件 (3.8) は

$$\frac{e}{R} \le \frac{1-4R+2R^2}{2-6R+3R^2}$$

となるが、容易に次の不等式を示すことができる。

$$\frac{1-2R}{2-3R} > \frac{1-4R+2R^2}{2-6R+3R^2} \quad \text{for} \quad 0 < R < 1/3.$$

したがって、R に関する制約として条件 (3.7) は条件 (3.8) よりも強く、条件 (3.8) も不要である。このように、定理 1 と 2 は定理 4 およびその系よりも完全であると言える。

参考文献

[Mard49] M. Marden: *The Geometry of the Zeros of A Polynomial in a Complex Variable.* Vol. 3 of *Mathematical Surveys*, AMS, New York, 1949.

[Mig92] M. Mignotte M: *Mathematics for Computer Algebra*, Springer-Verlag, 1992, Ch. 4.

[NS91] M-T. Noda and T. Sasaki: Approximate GCD and its application to ill-conditioned algebraic equations. J. Comput. Appl. Math., Vol. 38 (1991), pp. 335-351.

[SI02] T. Sasaki and D. Inaba: Certification of analytic continuation of algebraic function. Preprint of Univ. Tsukuba, 2002, 15 pages (submitted).

[SN89] T. Sasaki and M-T. Noda : Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations. J. Inf. Proces. **12** (1989), pp. 159–168.

[ST02] T. Sasaki and A. Terui: A formula for separating small roots of a polynomial. ACM SIGSAM Bulletin, Vol. 36 (2002), 19–29.

[TS00] A. Terui and T. Sasaki: "Approximate zero-points" of real univariate polynomial with large error terms. *IPSJ Journal (Information Processing Society of Japan)* **41** (2000), 974-989.

[Yak00] J.C. Yakoubsohn: Finding a cluster of zeros of univariate polynomials. J. Complexity **16** (2000), 603–636.